

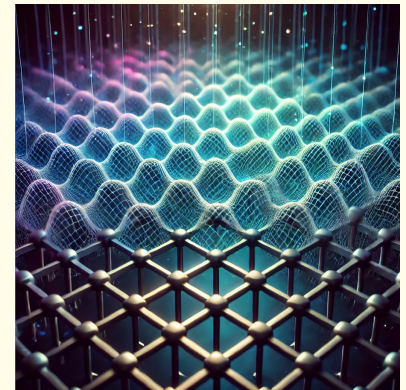
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE11 : Éléments d'analyse géométrique

PLAN DU COURS

- **Partie 1 : Champs tensoriels et formes différentielles**
 - Algèbre multilinéaire en dimension finie : espace dual, tenseurs, tenseurs antisymétriques, espaces linéaires réels, structures de produit (produit tensoriel, produit extérieur, etc.).
 - Champs vectoriels : espace tangent, dérivée d'une application et matrice jacobienne, dérivée de composition, structures régulières, champs vectoriels et équations différentielles, champs vectoriels en tant qu'opérateurs, crochet de Lie des champs vectoriels, crochet de Poisson.
 - Champs tensoriels et formes différentielles : constructions, opérations ponctuelles, dérivée extérieure, dérivée de Lie, métriques riemanniennes, changements de coordonnées (push-forward et pull-back), importance pour la définition des notions globales.
 - Intégration : variétés, sous-variétés, immersions, submersions et plongements, orientation et forme de volume, variétés à bord, intégration sur les variétés à bord, théorème de Stokes, formes exactes et closes, lemme de Poincaré, divergence, rotationnel, théorèmes de divergence et de Stokes comme cas particuliers.
- **Partie 2 : Structures géométriques et géométrie différentielle**
 - Théorie des surfaces : courbure et torsion d'une courbe dans l'espace tridimensionnel, dérivée seconde d'une courbe sur une surface et dérivée covariante, géodésiques, connexions avec la mécanique newtonienne, courbure géodésique (notions intrinsèques et extrinsèques), courbures de Gauss (intrinsèque et extrinsèque), plongements isométriques, seconde forme et application de Weingarten, théorème *egrégium*, théorème de Gauss-Bonnet.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : R. Pakzad
7 ECTS
50 heures

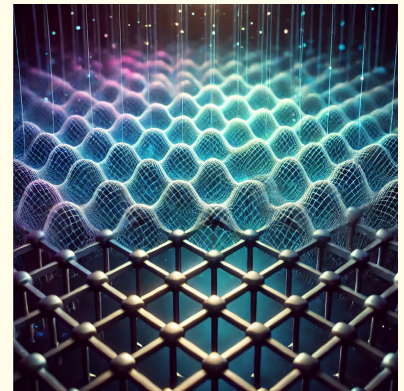
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 12 : Analyse fonctionnelle et théorie des distributions

PLAN DU COURS

- Vocabulaire usuel en analyse fonctionnelle : opérateurs et fonctionnelles, opérateur adjoint et fonctionnelle conjuguée.
- Espaces métriques complets : point fixe (Banach-Picard), fermés emboîtés, propriété de Baire, méthode directe, principe variationnel d'Ekeland.
- Opérateurs linéaires et continus : principe de la borne uniforme (Banach-Steinhaus), application ouverte, continuité de l'opérateur inverse, normes équivalentes, graphe fermé.
- Prolongement de fonctionnelle et séparation de convexes : prolongement (Hahn-Banach), séparation large ou stricte des convexes, critère de densité, biconjuguée (Fenchel-Moreau).
- Topologies faibles des espaces de Banach : topologie faible étoile (Banach-Alaoglu Bourbaki), topologie faible et espaces réflexifs (Kakutani).
- Espaces de Hilbert : représentation (Riesz-Fréchet), projection, représentation (Stampacchia et Lax-Milgram), base hilbertienne (Bessel-Parseval), compacité faible (Bolzano-Weierstrass), opérateur auto-adjoint compact.
- Distributions : distribution sur un ouvert de \mathbb{R}^N , distribution à support compact, représentation des distributions d'ordre zéro (Riesz-Markov).
- Exemples d'espaces fonctionnels sur un ouvert de \mathbb{R} : dérivée première faible d'une fonction croissante, fonctions à variation bornée, dérivée seconde faible d'une fonction convexe, fonctions absolument continues, espaces de Sobolev.
- Espaces de Sobolev sur un ouvert de \mathbb{R}^N : injections continues (Sobolev), injections compactes (Rellich-Kondrachov), opérateurs de prolongement, notion de trace, exemples de problèmes aux limites.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : J.-J. Alibert
7 ECTS
50 heures

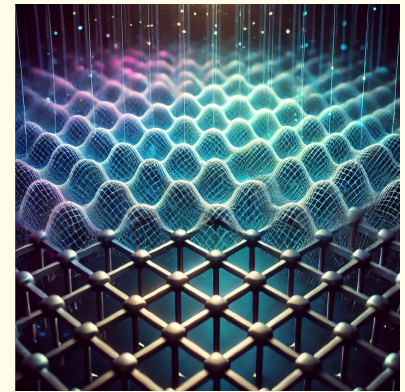
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 13 : Fondations mathématiques de la mécanique classique

PLAN DU COURS

- **Partie I : Rappels de mécanique newtonienne**
 - Équation de Newton comme équation différentielle ordinaire.
 - Quantités mécaniques de base : énergie, moment, travail, etc.
 - Constantes de mouvement, théorème de conservation de l'énergie.
 - Formulation lagrangienne de l'équation de Newton, principe de la moindre action.
 - Formulation hamiltonienne et conservation de l'énergie.
- **Partie II : Concepts généraux des systèmes dynamiques et espaces de phases**
 - Variété différentiable, espace tangent et cotangent, structure symplectique, forme symplectique des équations de Hamilton.
 - Transformation canonique, flux hamiltonien, constantes de mouvement, théorème de Noether.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : A.Panati
3 ECTS
18 heures

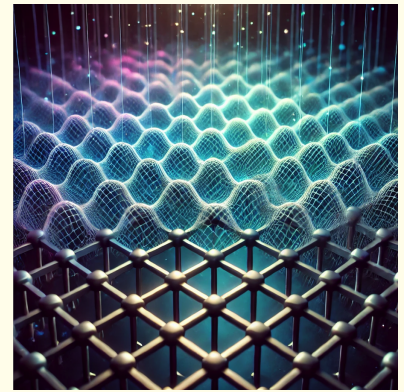
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 14 : Probabilités et applications

PLAN DU COURS

- Rappels de théorie de la mesure, théorie de l'intégration (théorème de Fubini).
- Espaces de probabilité.
- Variables aléatoires et étude de leurs distributions.
- Théorème limite central et applications.
- Processus stochastiques et modèles mathématiques associés.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : S. Vaienti
7 ECTS
50 heures

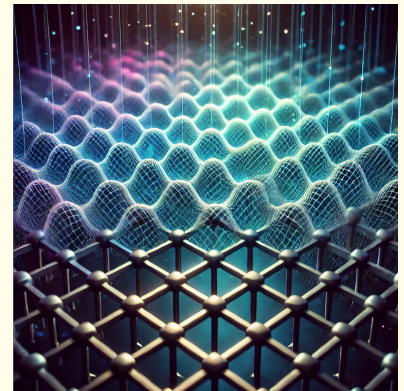
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 15 : Introduction au calcul scientifique

PLAN DU COURS

- **Objectif global** : Doter les étudiants des compétences nécessaires pour résoudre numériquement une gamme variée de problèmes mathématiques et scientifiques, tout en leur fournissant une base solide en algèbre linéaire et en analyse numérique.
- **Approximation d'un problème de Cauchy** : Schémas classiques par formules de quadrature, utilisation de `scipy`.
- **Approximation d'un problème aux limites 1D par différences finies** : Systèmes creux issus des différences finies sur problèmes aux limites 2D, implémentation avec `numpy`.
- **Notion de convergence et vérification** : Techniques de débogage.
- **Introduction à l'analyse de Fourier** : Définition de Fourier réel sur bases périodiques et "Neumann", puis complexe classique. Propriétés d'orthogonalité.
- **Équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants** : Exemple de l'équation de la chaleur, résolution des équations différentielles ordinaires fréquence par fréquence, travaux pratiques avec validation.
- **Convolution** : Application de la convolution sur images 2D.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : C. Galusinski
3 ECTS
26 heures

MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 16 : Langue/TICE

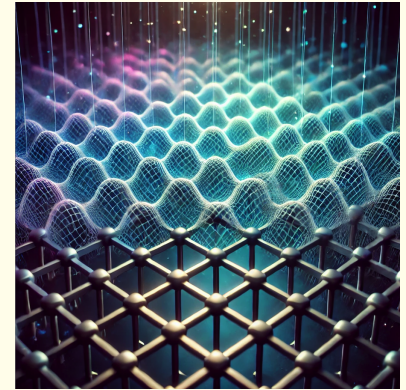
PLAN DU COURS

- **Anglais** (2 ECTS – 18h)

Ce cours a pour but de développer les cinq compétences d'anglais : compréhension orale, expression orale, interaction orale, compréhension écrite, expression écrite. Pour ce faire, il sera demandé aux étudiants d'effectuer des exposés oraux sur un sujet relatif à l'anglais scientifique (des précisions seront apportées au premier cours, auquel il est indispensable d'assister) et de débattre sur ces sujets. De même, le travail évoluera autour de thématiques scientifiques exploitées à travers le prisme de vidéo et de documents écrits en anglais. Une participation active et, à l'évidence, l'assiduité des étudiants sont nécessaires à la réussite de cette UE.

- **TICE** (1 ECTS – 10h)

Introduction à \LaTeX



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : F. Armao (Anglais)
3 ECTS
28 heures

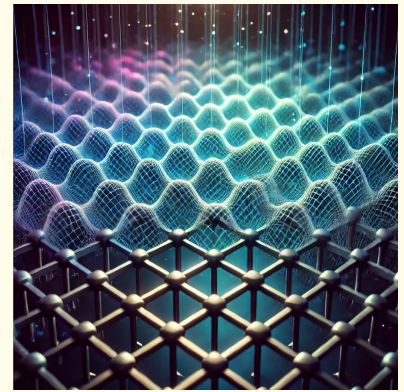
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 21 : Théorie des représentations

PLAN DU COURS

- Définitions, groupes classiques, compacité, connexité, homomorphismes.
- Définitions, exemples, lemme de Schur, somme directe de représentations.
- Construction de représentations de $SU(2)$, représentations irréductibles de $su(2)$.
- Représentations de groupes vs. représentations d'algèbres de Lie.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignants : Y. Aubry, J. Asch
6 ECTS
48 heures

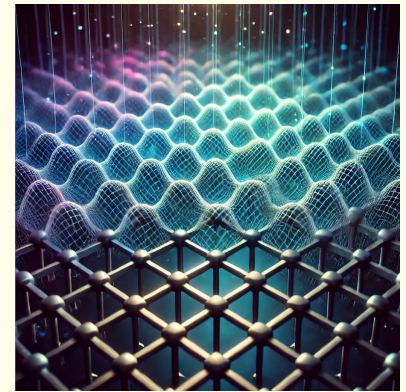
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 22 : Fondations mathématiques de la mécanique quantique

PLAN DU COURS

- Révision et éléments supplémentaires de théorie des distributions et transformation de Fourier.
- Le formalisme mathématique de la mécanique quantique : concepts de base, dualité onde-corpuscule, quantification, états quantiques, principe d'incertitude, observables quantiques et mesure spectrale, équation de Schrödinger, spin et équation de Pauli, opérateurs unitaires et équivalence unitaire.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignants :

J.-M. Barbaroux, M. Rouleux

6 ECTS

48 heures

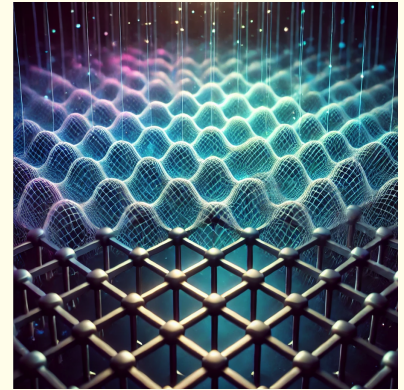
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 23 : Introduction aux EDP

PLAN DU COURS

- Systèmes elliptiques : opérateurs elliptiques, conditions aux limites, formulations variationnelles, conditions nécessaires de minimalité, existence des solutions, semi-continuité inférieure des fonctionnelles intégrales, notions diverses de convexité portant sur l'existence et la régularité.
- Théorie de la régularité (linéaire) : méthode de Nirenberg, estimations de la décroissance pour les systèmes à coefficients constants, régularité jusqu'au bord.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : N. Clozeau
6 ECTS
48 heures

MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 24 : Fondations mathématiques de la mécanique des solides

PLAN DU COURS

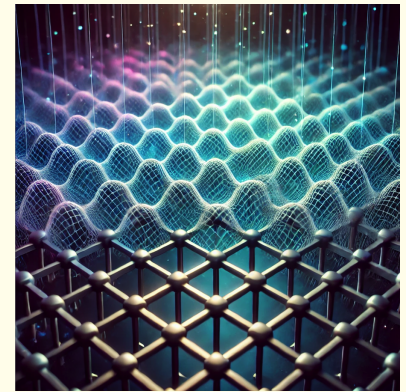
- **Partie 1. Fondations mathématiques de la mécanique des milieux continus**

- Cinématique : Déformations, placements, et déplacements, théorème de Liouville, changement de variables, mouvement, description matérielle (lagrangienne) et spatiale (eulérienne), vitesse vue comme champ matériel, dérivée temporelle matérielle, dérivée de vitesse matérielle et non-linéarité des équations, tenseur des déformations linéaires et non-linéaires, conditions de compatibilité.
- Équations d'équilibre : forces et leurs différents types (forces de contact, forces de volume), principe des puissances virtuelles, équilibre, théorème de Cauchy, tenseur des contraintes de Cauchy et exemples, conservation de la masse, conservation de quantité du mouvement, conservation du moment cinétique et symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy, formulation dans les référentiels, tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Thermoélasticité.
- Lois de comportement (exemples : fluides idéaux ; matériaux élastiques), indifférence au référentiel (objectivité), isotropie

- **Partie 2. Mécanique des solides et la théorie d'élasticité**

- Matériaux élastiques, équations du mouvement, hypothèse de potentiel pour le tenseur des contraintes PK, densité d'énergie stockée, propriétés de la densité d'énergie : indifférence au référentiel, principe de non-interpénétration des matériaux, exemples (caoutchouc, structures néo-hookéennes, cristallines, etc).

Les sujets de la deuxième partie seront rigoureusement explorés dans le cours M2 UE 33 : théorie de l'élasticité.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : R. Pakzad
2 ECTS
18 heures

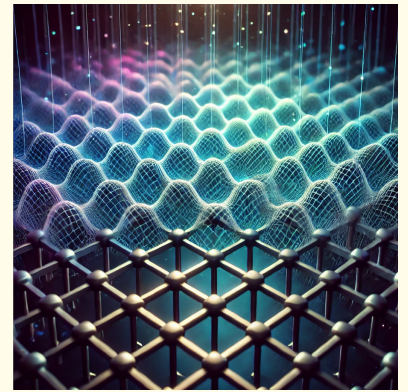
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 25 : Méthodes d'optimisation

PLAN DU COURS

- **Objectif** : Aborder diverses méthodes mathématiques en lien avec l'optimisation, en acquérant des bases théoriques solides telles que l'écriture des conditions d'optimalité et l'identification de la régularité des données.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : T. Champion
2 ECTS
26 heures

MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 26 : TER/Langue

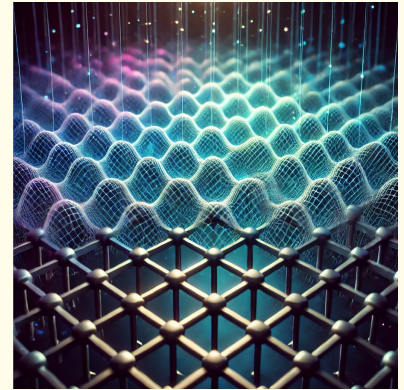
CONENU

- **Le TER (Travail Encadré de Recherche)**
(6 ECTS, dure 6 à 8 semaines)

Le projet s'effectue sous la direction d'un chercheur ou enseignant-chercheur dans un laboratoire d'accueil (CPT, IMATH, etc.), dans une école d'ingénieurs (SeaTech, etc.) ou comme stage dans une entreprise extérieure.

- **Anglais** (2 ECTS – 18h)

Voir le plan du cours UE 16 du semestre 1



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : F. Armoa (Anglais)
8 ECTS
210 + 18 heures

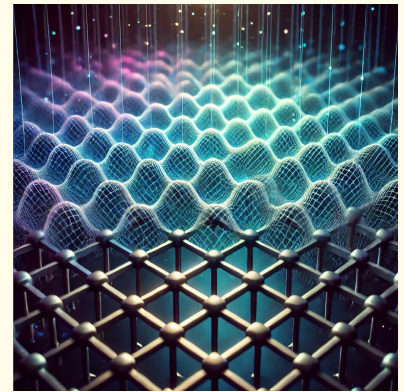
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 31 : Algèbre d'opérateurs et théorie quantique

PLAN DU COURS

- **C*-algèbres**
 - Définitions : algèbre de Banach, C*-algèbre, unitarité, exemples, opérateur borné.
 - Analyse spectrale : ensemble résolvant, spectre, classes importantes et leurs spectres, calcul fonctionnel, positivité.
 - États et représentations : définitions, inégalité de Cauchy-Schwarz, représentation cyclique, représentation GNS.
- **W*-algèbres**
 - Topologie d'opérateurs : espace vectoriel topologique localement convexe et séparé.
 - Commutant : commutant et convergence faible, théorème du bicommutant, prédual.
- **Théorie de Tomita-Takesaki**
 - Opérateurs modulaires : vecteur séparateur, opérateur à trace, matrice densité, état normal, état fidèle, opérateurs modulaires, conjugaison modulaire, état tracial.
 - Groupe modulaire : théorème de Tomita-Takesaki, dynamique quantique et groupe modulaire.
 - **États d'équilibre**
 - Condition KMS et stabilité, gaz de Fermi idéal et autres exemples.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : W. Aschbacher
7 ECTS
42 heures

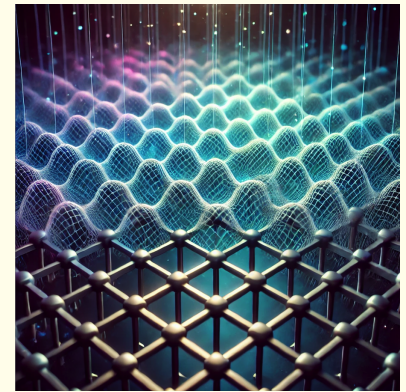
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 32 : Analyse spectrale et dynamique quantique

PLAN DU COURS

- Opérateurs non bornés auto-adjoints et extensions auto-adjointes, critères d'auto-adjonction, théorème de Kato-Rellich.
- Extension/révision du théorème spectral, nature du spectre, calcul fonctionnel dans le cas non borné, calcul analytique et formule de Dunford-Schwarz.
- Rappel sur la quantification et interprétation de la mesure spectrale, caractérisation de Weyl, invariance du spectre essentiel ; théorie des perturbations.
- Dynamique : équation de Schrödinger et théorèmes de Stone et Hille-Yoshida.
- Caractérisation géométrique des états liés et de diffusion, éléments de la théorie de la diffusion.
- Étude d'exemples usuels.
- Autres sujets avancés selon l'intervenant.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignants : J. Asch, A. Panati
7 ECTS
42 heures

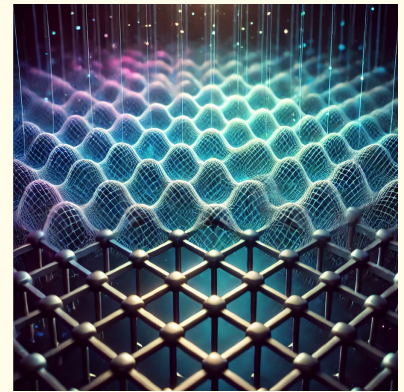
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 33 : Théorie de l'élasticité

PLAN DU COURS

- Matériaux élastiques, élasticité linéaire en première approximation, équations du mouvement et existence de solutions.
- Hypothèse de potentiel pour le tenseur des contraintes Piola-Kirchhoff, densité d'énergie stockée, propriétés de densité d'énergie : indifférence au référentiel, principe de non-interpénétration des matériaux.
- Exemples : caoutchouc, structures néo-hookéennes, cristallines, etc.
- Incompressibilité, théorie variationnelle de l'élasticité non linéaire, élasticité linéaire en première approximation.
- Formulation variationnelle des lois d'équilibre (équations d'Euler-Lagrange), autres formes d'Euler-Lagrange obtenues par variations internes et tenseur élastique d'énergie-impulsion (Eshelby).
- Élasticité linéaire variationnelle en première approximation, théorème de rigidité quantitative de Friesecke-James-Müller, Gamma-convergence, théories variationnelles des poutres et des plaques.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : R. Pakzad
7 ECTS
42 heures

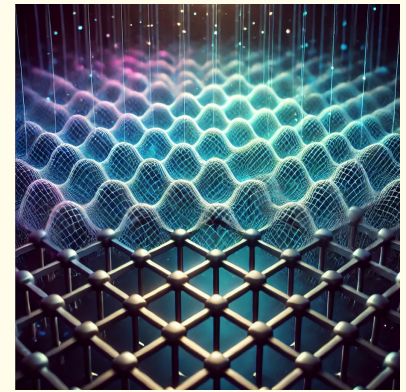
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 34 : Processus stochastiques

PLAN DU COURS

- **Partie I :**
 - Rappel de théorie de la mesure, vecteur aléatoire et espérance conditionnelle.
 - Convergence de variables aléatoires et variables gaussiennes.
 - Martingales à temps discret et chaînes de Markov.
- **Partie II :**
 - Généralités sur les processus stochastiques, martingales à temps continu, mouvement brownien, intégrale stochastique (calcul d'Itô, etc.).



INFOS GÉNÉRALES

Enseignants :
S. Vaienti, P. El kettani
7 ECTS
42 heures

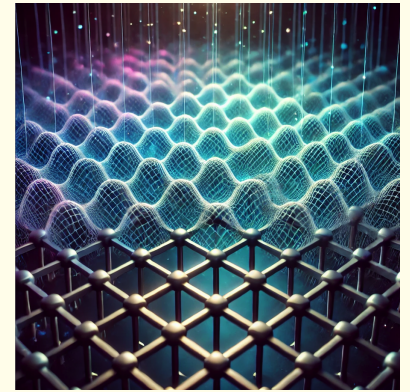
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 35 : Langue

PLAN DU COURS

- **Anglais scientifique** : Ce cours a pour but de développer les compétences en anglais scientifique, tant à l'écrit qu'à l'oral, afin de permettre aux étudiants de communiquer efficacement dans un contexte académique et professionnel international.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant :
F. Armao
2 ECTS
18 heures

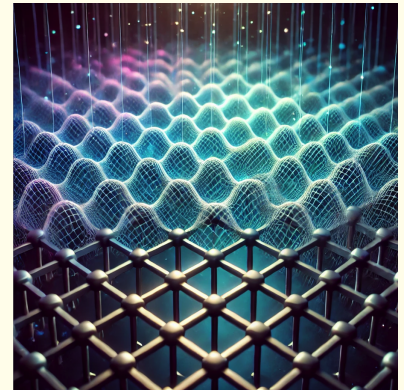
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 41 : Cours avancé thèmes de recherche du laboratoire CPT

PLAN DU COURS

- Thèmes de recherche avancés développés au sein du Centre de Physique Théorique (CPT).
- Approfondissement de sujets spécifiques en physique mathématique et mécanique quantique.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : M. Rouleux
5 ECTS
20 heures

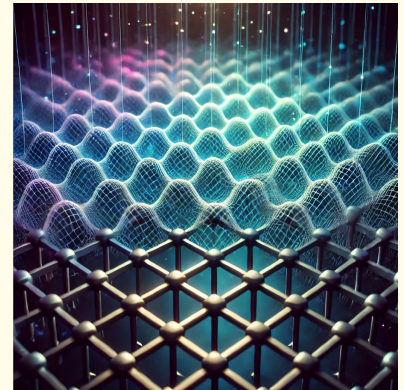
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 42 : Cours avancé : thèmes de recherche du laboratoire IMATH

PLAN DU COURS

- Thèmes de recherche avancés développés au sein du laboratoire IMATH.
- Approfondissement de sujets spécifiques en mathématiques appliquées et analyse.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : R. Pakzad
5 ECTS
20 heures

MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

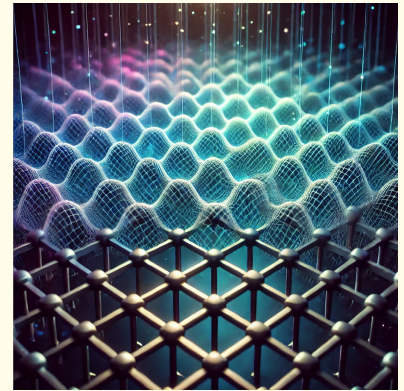
Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 43 : Travail Encadré de Recherche ou Stage

CONENU

- Le TER (Travail Encadré de Recherche)

Le projet, d'une durée minimum de 3 mois, s'effectue sous la direction d'un chercheur ou enseignant-chercheur dans un laboratoire d'accueil (CPT, IMATH, etc.), dans une école d'ingénieurs (Sea-Tech, etc.) ou comme stage dans une entreprise extérieure.



INFOS GÉNÉRALES

19 ECTS
462 heures

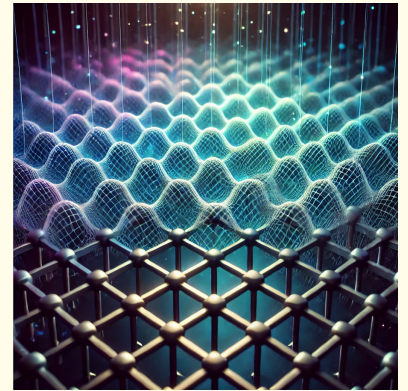
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Parcours : Mathématiques fondamentales de la mécanique
et des systèmes quantiques

UE 44 : Développements récents

CONENU

- Présentation des avancées récentes dans les domaines de recherche liés au master.
- Séminaires et conférences par des experts invités.



INFOS GÉNÉRALES

Enseignant : Conférencier invité
1 ECTS
3 heures